**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026**

**CLASA A IX-a**

**SUBIECTUL I (40 de puncte)**

**Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indică varianta corectă de răspuns:**

**(4p) 1.** Câte numere naturale de 5 cifre au atât prima cifră, cât și ultima cifră, egală cu 7?

A. 1 B. 10000 C. 1000 D. 9000 E. 90000

**(4p) 2.** Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|2x+1|\le 10$ și $|3y-2|\le 11$. Valoarea minimă a expresiei $E(x,y)=3x+2y$ este egală cu:

A. $-\frac{49}{2}$ B. $-\frac{45}{2}$ C. $-\frac{41}{2}$ D. $-\frac{49}{6}$ E. $-\frac{41}{6}$

**(4p) 3.** Suma elementelor mulțimii $A=\left\{n\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{n^2+2n+5}{n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$ este:

A. $-10$ B. $-8$ C. $-6$ D. $-4$ E. $-2$

**(4p) 4.** Suma soluțiilor ecuației $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$ este egală cu:

A. $-15$ B. $-13$ C. $-11$ D. $-9$ E. $-4$

**(4p) 5.** Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ și $abc=\sqrt{3}$, atunci valoarea minimă a expresiei $E=(a+b)(b+c)(c+a)$ este egală cu:

A. $\sqrt{216}$ B. $\sqrt{192}$ C. $\sqrt{147}$ D. $\sqrt{108}$ E. $\sqrt{75}$

**(4p) 6.** Se consideră triunghiul $ABC$ și punctul $M$ astfel încât $7\cdot\overrightarrow{AM}=5\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}$. Valoarea raportului $\frac{BM}{MC}$ este egală cu:

A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{10}{7}$ D. $2,5$ E. $0,4$

**(4p) 7.** În patrulaterul $ABCD$ se notează cu $M$ mijlocul laturii $AB$ și cu $N$ mijlocul laturii $CD$. Vectorul $\overrightarrow{MN}$ este egal cu:

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$ B. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)$ C. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$ D. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\right)$ E. $\overrightarrow{AC}$

**(4p) 8.** Fie $AB$ și $CD$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru $O$ și $AB \cap CD = \{P\}$. Dacă $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\alpha\overrightarrow{PO}$, atunci $\alpha$ este egal cu:

A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $-2$ D. 4 E. $-3$

**(4p) 9.** Fie triunghiul $ABC$, $O$ centrul cercului său circumscris, $A'$ punctul diametral opus lui $A$ în cerc și $H'$ ortocentrul triunghiului $BCA'$. Atunci $\overrightarrow{OH'}$ este egal cu:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}$ B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ C. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$ D. $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}$ E. $\vec{0}$

**(4p) 10.** Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB$ și $CD$ astfel încât $AB=2\cdot CD$. Fie $M\in(AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$ și $P\in(DM)$ astfel încât $\frac{DP}{PM}=x$. Știind că punctele $A, P, C$ sunt coliniare, valoarea numărului real $x$ este:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$ E. $\frac{1}{4}$

**La subiectele II și III scrie rezolvările complete:**

**SUBIECTUL II (25 de puncte)**

Fie $a,b\in\mathbb{N}$. Arătați că, dacă mulțimea

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}\ \middle|\ \left[\sqrt{(n+a)(n+b)}\right]=n+a\right\}$$

conține cel puțin un număr natural *nenul*, atunci $A=\mathbb{N}$.

(Notația $[x]$ semnifică partea întreagă a numărului real $x$).

*Gazeta Matematică nr. 9 / 2025*

**SUBIECTUL III (25 de puncte)**

Se consideră triunghiul $ABC$ și punctele $D$, $E$, $F$ în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AD}=\frac{25}{11}\cdot\overrightarrow{AC}$, $2\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$ și $11\cdot\overrightarrow{BF}=4\cdot\overrightarrow{BC}$.

a) Arătați că dreptele $DF$ și $CE$ sunt paralele.

b) Fie $K$ un punct în planul triunghiului $ABC$ astfel încât $\overrightarrow{AK}=x\cdot\overrightarrow{AC}$, unde $x\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea lui $x$ știind că punctele $K$, $E$, $F$ sunt coliniare.

Note: Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 3 ore.